

Покращення точності нечіткої бази Мамдані за допомогою суперечливих правил

Сергій Штовба

професор, д-р техн. наук
ORCID: 0000-0003-1302-4899
s.shtovba@donnu.edu.ua

Донецький національний університет імені Василя Стуса

Роман Резнік

ORCID: 0009-0007-4740-7093
reznik.r@donnu.edu.ua

Донецький національний університет імені Василя Стуса

Ключові слова:

нечітке виведення,
нечіткі правила Мамдані,
суперечливі правила,
селекція правил,
жадібний алгоритм,
точність.

Розглядається задача моделювання багатофакторних залежностей з неперервним виходом за допомогою нечітких баз знань. Однією із головних конкурентних переваг нечіткого моделювання є інтерпретабельність нечітких баз знань – користувачу, далекому від математичних методів, доволі легко можна зрозуміло пояснити, на підставі чого отримується той чи інший висновок. Для нечіткого моделювання залежностей з неперервним виходом найчастіше використовують бази знань Мамдані та Сугено. Нечіткі бази знань Сугено точніші, але мають низьку інтерпретабельність. Бази знань Мамдані мають високу інтерпретабельність, але низьку точність. Підвищити інтерпретабельність баз знань Сугено проблематично через те, що ця властивість обумовлена саме форматом правил. Задача підвищення точності бази знань Мамдані доволі легко формалізується, тому можна спробувати її вирішити у деякий алгоритмічний спосіб. Саме на підвищення точності нечіткої бази знань Мамдані і спрямована стаття. Спосіб підвищення точності нечіткої бази знань Мамдані обрано використання суперечливих правил. Під суперечливими правилами розуміються правила з однаковими антецедентами та різними консеквентами. За результатами проведених обчислювальних експериментів встановлено, що застосування суперечливих правил Мамдані через підвищення роздільної здатності лінгвістичної опису залежностей забезпечує кращу точність. Експерименти проведено на трьох синтетичних наборах даних і на одному реальному наборі для задачі Auto MPG. Селекція правил здійснена за жадібним алгоритмом. Використання суперечливих правил дає змогу на етапі структурної ідентифікації досягти кращої точності та компактності нечіткої моделі. Також встановлено, що логічне виведення за суперечливих правил можна коректно та результативно реалізувати за схемою A-FATI, тоді як у попередніх дослідженнях використовувалася спрощена схема B-FITA.

DOI: 10.31558/2786-9482.2023.1.5

Вступ

Сьогодні нечіткі бази знань успішно застосовують для моделювання складних залежностей у різних областях – в медицині, економіці, інженерії тощо [1, 2]. Однією із головних конкурентних переваг нечітких баз знань є інтерпретабельність моделі –

користувачу, далекому від математичних методів, доволі легко можна пояснити на підставі чого отримується той чи інший висновок.

У статті розглядаються задачі ідентифікації залежностей з неперервним виходом. Для нечіткого моделювання таких залежностей найчастіше використовують бази знань з правилами у форматах Мамдані та Сугено. Нечіткі бази знань Сугено точніші, але мають низьку інтерпретабельність. Бази знань Мамдані, навпаки, мають високу інтерпретабельність, але низьку точність [3]. Підвищити інтерпретабельність баз знань Сугено проблематично через те, що ця властивість обумовлена саме форматом правил. Задача підвищення точності бази знань Мамдані доволі легко формалізується, тому можна спробувати її розв'язати у деякий алгоритмічний спосіб. Саме на підвищення точності нечіткої бази знань Мамдані і спрямована стаття. Способом підвищення точності нечіткої бази знань Мамдані обрано використання суперечливих правил.

Огляд літератури та мета дослідження

У нечіткій базі знань Мамдані антецеденти і консеквенти правил задано нечіткими термами. Як приклад, наведемо 2 такі правила: 1) якщо температура – *низька* та вітер – *сильний*, тоді витрати газу на опалення – *високі*; 2) якщо температура – *нижче середньої*, тоді витрати газу на опалення – *середні*. У наведених правилах нечіткі терми виділено курсивом. Використання у правилах лінгвістичних антецедентів та консеквентів обумовлює інтерпретабельність нечіткої бази знань Мамдані.

Проектування нечітких баз знань переважено здійснюють за критеріями точності, компактності та інтерпретабельності. Ця трійка критеріїв є конфліктною – неможливо створити нечітку базу знань, яка одночасно є найкращою за усіма цими критеріями. Розроблено багато підходів до проектування нечітких баз знань на основі деякого компромісу між цими критеріями, які описані у статтях [3, 4, 5, 6] та в інших публікаціях.

Точність нечіткої бази знань Мамдані зазвичай оцінюють за середньою квадратичною нев'язкою між експериментальними даними та виходом моделі. Компактність оцінюють за кількістю нечітких правил та сумарною довжиною антецедентів усіх правил [7, 8]. Інтерпретабельність також можна оцінити кількісно [9], але зручніше сформулювати множину обмежень на число термів та форму функцій належностей нечітких множин. Виконання цієї множини обмежень забезпечує інтерпретабельність нечіткої бази знань [8, 10]. Водночас вважається, що сукупність правил у нечіткій базі знань узгоджена, тобто в ній відсутні суперечливі правила з однаковими антецедентами та різними консеквентами.

Цілком логічна заборона на суперечливі правила спільно з іншою вимогою до інтерпретабельності, а саме з малою потужністю вихідної терм-множини, інколи призводять до низької точності. Пояснимо цей ефект на такому прикладі. Нехай вихідна зміна набуває значення з терм-множини $\{\text{Дуже низький}, \text{Низький}, \text{Середній}, \text{Високий}, \text{Дуже високий}\}$. Досліджувана залежність така, що в деякій зоні факторного простору вихідне нечітке значення *Середній* – замале, а нечітке значення *Високий* – завелике. Адекватним є значення між *Середнім* та *Високим*, але терма *Вище середнього* у терм-множині немає. У такому випадку проблемну зону факторного простору залишають без правила і

намагаються описати досліджувану залежність правилами для сусідніх зон. Внаслідок суперпозиції висновків після дефазифікації можна вийти на необхідне вихідне значення. Але підібрати таку вдалу сукупність правил інколи доволі складно.

Альтернативою використанню кількох правил із сусідніх зон є застосування суперечливих правил. Якщо в базі знань є пара суперечливих правил, наприклад, із консеквентами *Середній* та *Високий*, тоді результат логічного виведення за ними буде між *Середнім* та *Високим*. Цей висновок відповідатиме бажаному терму *Вище середнього*. Таке застосування суперечливих правил підвищує лінгвістичну роздільну здатність опису залежності, яку моделює база знань. Відповідно з'являються шанси підвищити точність нечіткої бази знань через використання суперечливих правил без розширення вихідної терм-множини.

Вперше ідея використання суперечливих нечітких правил запропонована в [11]. У тій статті усі суперечливі правила розподілено у дві нечіткі бази знань. У першу базу знань увійшли правила з консеквентами першого вибору, які отримані за деяким алгоритмом екстракції правил з навчальної вибірки. Друга база знань сформована із правил, кожне з яких є суперечливим до одного із правил із першої бази знань. Правила з другої бази знань мають консеквенти другого рангу, які отримані як проміжні результати того самого алгоритму екстракції правил. Логічне виведення здійснюється одночасно за обома базами знань з агрегуванням результату на рівні правил. Використовується спрощена схема дефазифікації за ядрами консеквентів. Алгоритмічно, сукупність таких процедур еквівалентна виведенню по одній спільній сингтонній базі знань, у якій кожна пара суперечливих правил замінена на одне сингтонне. У сингтонному правилі консеквентом є числове значення, яке знаходиться між ядрами нечітких консеквентів суперечливих правил. Тобто хоча за зовнішнім виглядом нечіткі бази знань у [11] мають суперечливі правила, алгоритмічно це не так.

Ідея суперечливих правил розвинута в [12]. Запропоновано додавати суперечливі правила лише до тих правил, де це дійсно потрібно, де це має сенс. Пару суперечливих правил у тій статті називають *double-consequent rule*. На формування пар суперечливих правил накладається змістовне обмеження, відповідно до якого значеннями консеквентів можуть бути лише сусідні терми. Наприклад, якщо консеквент першого суперечливого правила дорівнює *Низький*, тоді консеквент другого правила з цієї пари може бути лише *Середній*. Ця пара суперечливих правил змістовно еквівалентна одному правилу, консеквент якого дорівнює фіктивному терму *Нижче середнього*. Логічне виведення в [12] реалізовано за схемою В-FITA – *first infer, then aggregate*, коли спочатку висновок за кожним правилом дефазифікують, а потім числові значення за усіма правилами усереднюють. Лінгвістичні терми в [12] описано трикутними функціями належності. Це призводить до того, що числовий результат виводу за правилом з некрайнім термом у консеквенті завжди буде однаковим. Він не залежить від рівня активації правила, відповідно не залежить і від початкових даних. Для правил, консеквенти яких задано крайніми термами *Низький* або *Високий*, висновок залежить від ступеня активації. Зміни висновку за такими правилами обумовлені несиметричністю функцій належностей крайніх термів у межах діапазону значень вихідної змінної. Відповідно зрізання функції належності на різних рівнях

приведе до різних результатів дефазифікації. Отже, під час логічного виведення за [12] кожен пару суперечливих нечітких правил без крайніх термів у консеквантах можна замінити на одне сингтонне правило. У своїй подальшій роботі [13] автори вказують на цю властивість і доводять, що висновок за парою суперечливих правил еквівалентний висновку за одним сингтонним правилом з консеквентом, що дорівнює середньому значенню ядер задіяних нечітких множин. Але автори не вказують, що алгоритмічно таке виведення відповідає підходу [11] з успадкуванням описаного вище недоліку. Зазначений ефект відсутній для пар суперечливих правил, консеквент одного з яких задано крайнім термом, але таких правил порівняно небагато.

У [12] згадується про можливість реалізації логічного виведення за схемою A-FATI – *first aggregate, then infer*, відповідно до якої спочатку формується вихідна нечітка множина як об'єднання нечітких висновків за усіма правилами, а потім здійснюється її дефазифікація. Але автори відкинули цю реалізацію як неперспективну через можливість поглинання нечітких висновків за кількома правилами нечітким висновком за одним правилом з високим ступенем активації. Автори побоювалися, що нечіткі висновки саме за суперечливими правилами потраплять під поглинення, і відповідно внесок суперечливих правил буде анульованим. На наш погляд, ці побоювання надмірні.

У статті [14] пропонується набір процедур синтезу нечітких баз знань із використанням суперечливих правил. Зокрема, пропонуються жадібні методи селекції правил із двох списків кандидатів. Перший список кандидатів складається із несуперечливих правил, отриманих за одним із методів екстракції правил із даних, наприклад, за методом Ванга–Менделя [15]. Цей перший список і утворює початкову базу правил, яку покращують за допомогою правил із другого списку. Другий список кандидатів утворено правилами, які є суперечливими до першого списку правил. Правила з другого списку містять консеквенти з другим або третім рангом за методом Ванга–Менделя. Селекція правил здійснюється ітераційною заміною одного правила з поточної бази на суперечливе до нього правило з другого списку. В оптимізованій базі знань суперечливі правила не з'являються.

В усіх аналізованих статтях використовуються трикутні функції належності термів вхідних змінних, що утворюють нечітке розбиття за Руспіні [16]. За таких умов нечітка база знань має містити правилами з усіма можливими комбінаціями антецедентів. За відсутності хоча б одного правила утворюються зони факторного простору, в яких ступінь активації правил дорівнює нулю, що унеможлиблює результативне логічне виведення. Малі за обсягом бази знань з коректним виведенням на усьому факторному просторі можна отримати за нечітких множин із некомпактним носієм, наприклад, з гаусовими чи дзвоновими функціями належності, як це показано, наприклад, у [8, 10]. Але в цих та інших аналогічних роботах досліджуються узгоджені бази знань. Поза увагою дослідників залишилися компактні бази знань із суперечливими правилами. Саме дослідження впливу суперечливих правил на точність нечітких баз знань із гладкими функціями належності і є *метою статті*. Вплив суперечливих правил оцінимо за серією обчислювальних експериментів із синтезу нечітких баз знань Мамдані шляхом порівняння кривих навчання нечітких баз з узгодженими та з суперечливими правилами. Під кривою навчання

розуміється залежність точності нечіткої бази знань від кількості правил. Криву навчання нечіткої бази знань побудуємо за методикою з [17]. Дослідження проведемо за реалізації нечіткого виведення за схемою А-FATI.

Нечітка база знань Мамдані

Нечіткою базою знань називається сукупність нечітких правил <Якщо – тоді>, які описують певну предметну область. У базі знань Мамдані антецеденти і консеквенти задано нечіткими множинами. Цю базу знань можна трактувати як розбиття факторного простору на зони з нечіткими межами, в кожній з яких вихідна змінна набуває нечіткого значення. Кількість нечітких зон дорівнює числу правил. Нечітку базу знань Мамдані, що описує залежність $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представимо так:

$$\text{якщо } (x_1 = \tilde{a}_{1j} \text{ та } x_2 = \tilde{a}_{2j} \text{ та ... та } x_n = \tilde{a}_{nj}), \text{ тоді } y = \tilde{d}_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де \tilde{d}_j – нечітке значення, яке обирається з терм-множини $\{\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_m\}$, кожен елемент якої представлено нечіткою множиною $\tilde{l}_s = \int_{y \in [\underline{y}, \overline{y}]} \mu_{l_s}(y)/y, \quad s = \overline{1, m};$

N – кількість правил у базі знань.

Логічне виведення за нечіткою базою знань (1) здійснюють за процедурою з рис. 1. Ця процедура відповідає схемі А-FATI. Спочатку для поточного вхідного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ розраховують ступінь виконання антецедента j -го правила:

$$\mu_j(X^*) = \mu_j(x_1^*) \wedge \mu_j(x_2^*) \wedge \dots \wedge \mu_j(x_n^*), \quad j = \overline{1, N},$$

де \wedge – t-норма, яку в алгоритмі Мамдані зазвичай реалізують операцією мінімуму.

Результат логічного виведення запишемо у формі такої бінечіткої множини:

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{\mu_{d_1}(X^*)}{\tilde{d}_1}, \frac{\mu_{d_2}(X^*)}{\tilde{d}_2}, \dots, \frac{\mu_{d_N}(X^*)}{\tilde{d}_N} \right), \quad (2)$$

особливістю якої є те, що елементами її носія є нечіткі множини $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_N$. Для перетворення \tilde{y}^* у звичайну нечітку множину виконаємо такі дії. Спочатку представимо результат виведення за j -м правилом бази знань у формі такої нечіткої множини:

$$\tilde{d}_j^* = \text{imp}(\tilde{d}_j, \mu_j(X^*)), \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де imp позначає імплікацію, яку реалізують операцією мінімуму.

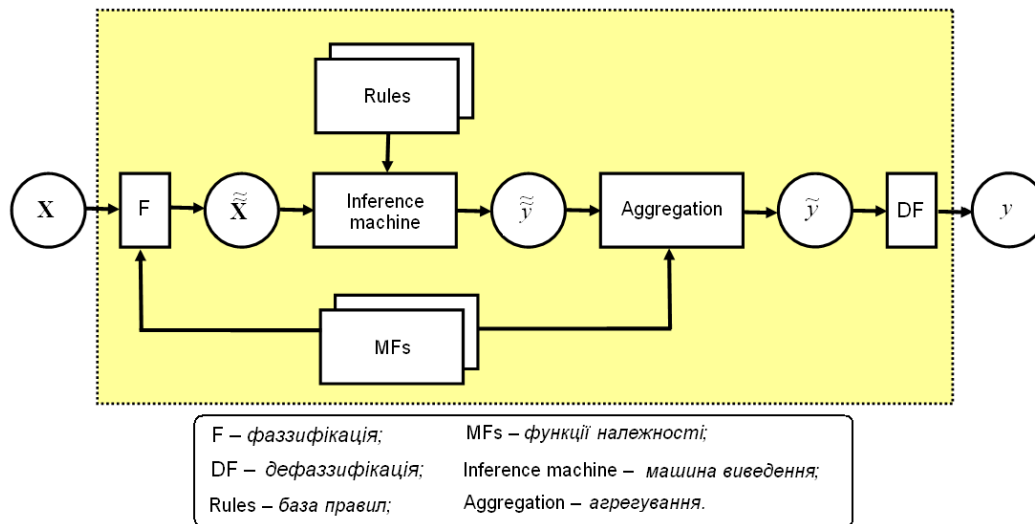


Рисунок 1. Логічне виведення за нечіткою базою знань Мамдані

Геометричною інтерпретацією імплікації є зрізання графіка функції належності $\mu_{d_j}(y)$ по рівню $\mu_j(X^*)$, що запишемо так:

$$\tilde{d}_j^* = \int_{y \in [y^-, \bar{y}]} \min(\mu_j(X^*), \mu_{d_j}(y)) / y.$$

Висновок за усіма правилами знаходимо агрегуванням нечітких множин (3):

$$\tilde{y}^* = \text{agg}(\tilde{d}_1^*, \tilde{d}_2^*, \dots, \tilde{d}_N^*),$$

де agg – агрегування нечітких множин, яке реалізують операцією максимуму. Ілюстрацією цієї формули є рис. 2, де здійснюється агрегування трьох нечітких множин.

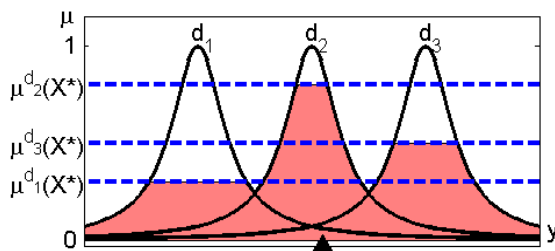


Рисунок 2. Імплікація, агрегування та дефазифікація в алгоритмі Мамдані

Чітке значення виходу y^* , яке відповідає вхідному вектору X^* , визначається через дефазифікацію нечіткої множини \tilde{y}^* за методом центру тяжіння.

У базі знань (1) можуть бути і суперечливі правила з однаковими антецедентами та різними консеквентами, наприклад:

якщо ($x_1 = \text{низький}$ та $x_2 = \text{середній}$), тоді $y = \text{середній}$;

якщо ($x_1 = \text{низький}$ та $x_2 = \text{середній}$), тоді $y = \text{високий}$.

Наявність суперечливих правил не впливає на процедуру логічного виведення. Спільний антецедент пари суперечливих правил продукує 2 нечіткі консеквенти, які так само увійдуть до бінечіткої множин (2), як і у випадку узгоджених правил.

Селекція правил бази знань Мамдані для нечіткої ідентифікації багатофакторних залежностей

Ідентифікація багатофакторних залежностей за допомогою нечіткої бази знань Мамдані здійснюється у 2 етапи. На першому етапі – на етапі структурної ідентифікації формується у деякий спосіб нечітка база знань – обираються терм-множини, задаються їх функції належності та синтезуються правила бази знань. На другому етапі – на етапі параметричної ідентифікації – налаштовуються параметри функцій належності [8, 18]. Наше дослідження стосується першого етапу – етапу структурної ідентифікації, а саме відбору правил до нечіткої бази знань.

Під час формування правил нечіткої бази доцільно забезпечити коректний баланс між компактністю та точністю. Необхідною умовою такого балансу є потрапляння бази знань на парето-фронт у координатах “складність моделі – точність моделі”. Алгоритми точного визначення парето-фронту мають щонайменше експоненціальну складність, тому їх використання доцільне лише за невеликої кількості правил-кандидатів. Для задач малої розмірності можна використовувати повний перебір, як це показано в роботі [17]. Для задач великої розмірності вибір правил можна здійснити за жадібним алгоритмом, який дуже швидко знаходить раціональні розв’язки – формує більш-менш прийнятний набір правил. Для покращення розв’язків застосовують пряму та зворотні схеми жадібного алгоритму – за прямою схемою починають із порожньої бази знань і ітераційно додають по одному найкращому правилу. За зворотної схеми починають із повною базою знань, з якої на кожному кроці вилучають найгірше правило.

Для дослідження ефекту від застосування суперечливих правил проведемо серію експериментів. У кожному експерименті для деякої залежності експертно сформуємо множину правил-кандидатів. Із цієї множини правил-кандидатів синтезуємо нечіткі бази знань різного обсягу і оцінимо їх точність за середньо-квадратичною нев’язкою *RMSE*. За цими даними побудуємо криві навчання у формі залежності *RMSE* від кількості правил. Криві навчання побудуємо для двох випадків – для баз знань з узгодженими правилами та із суперечливими правилами.

Експериментальні дослідження

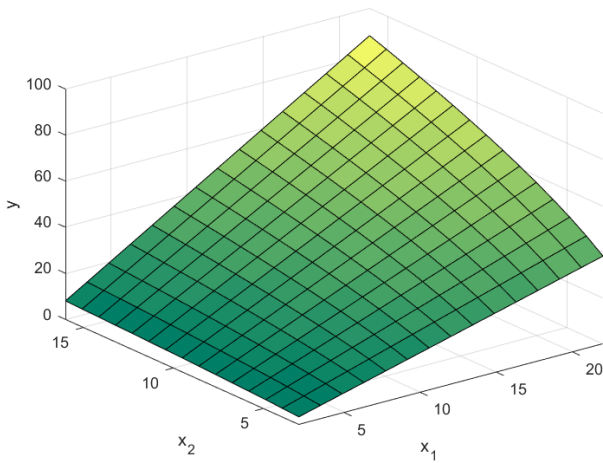
Експерименти проведемо на трьох синтетичних наборах даних та на даних задачі про паливну ефективність автомобіля Auto-MPG. Синтетичні набори даних синтезуємо для таких еталонних двофакторних залежностей:

$$y = x_1 \sqrt{x_2}, \quad x_1 \in [2, 22], \quad x_2 \in [3, 16], \quad (4)$$

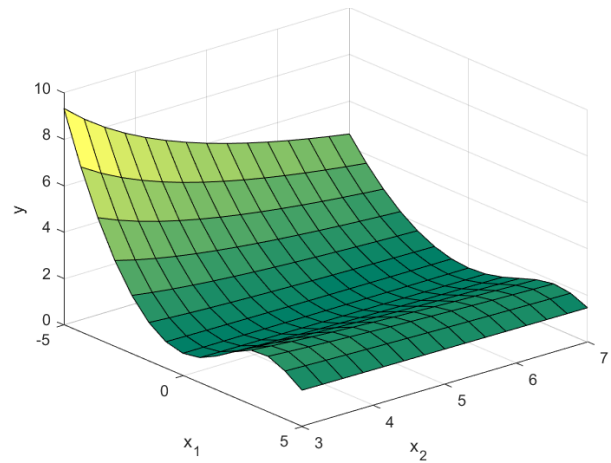
$$y = \frac{x_1^2 + x_2}{0.1e^{x_1} + x_2}, \quad x_1 \in [-5, 5], \quad x_2 \in [3, 7], \quad (5)$$

$$y = x_1^2 - x_2^3 \tan(0.1x_1), \quad x_1 \in [-2, 3], \quad x_2 \in [1, 5]. \quad (6)$$

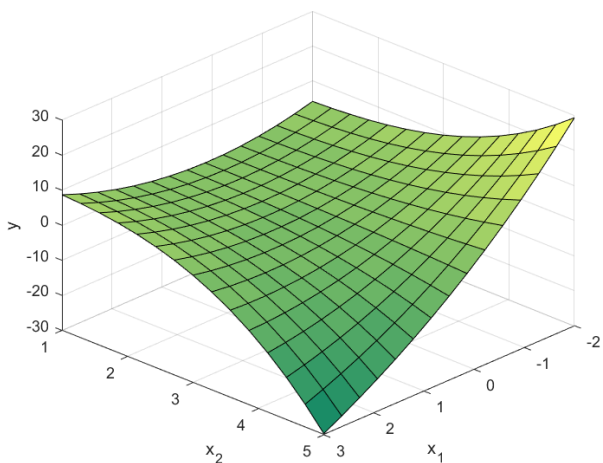
У задачі про паливну ефективність врахуємо 2 такі фактори: x_1 – маса автомобіля та x_2 – тривалість розгону до швидкості 60 миль за годину. Вихідною змінною є паливна ефективність (y) – відстань у милях, яку долає автомобіль на одному галоні палива. Поверхні еталонних залежностей наведено на рис. 3.



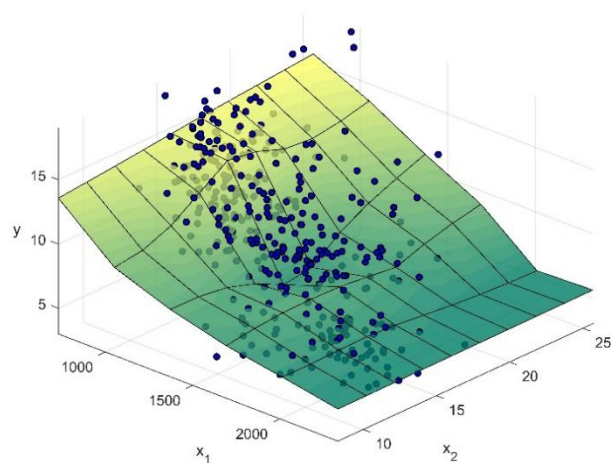
залежність (4)



залежність (5)



залежність (6)



залежність Auto MPG

Рисунок 3. Поверхні еталонних залежностей

Експерименти проведемо за такою методикою.

1. Спостерігаючи за тривимірним графіком еталонної залежності, сформуємо повну базу несуперечливих нечітких правил-кандидатів.

2. Доповнимо сформовану базу знань Мамдані суперечливими правилами – для правил із крайнім термом у консеквенті додамо одне суперечливе правило з сусіднім термом, а для інших – по 2 суперечливі правила з сусідніми термами. Найменше кандидатів виходить, коли у списку несуперечливих правил кожен некрайній терм фігурує в консеквенті лише одного правила. Найбільше кандидатів виходить, коли в списку несуперечливих правил кожен крайній терм фігурує в консеквенті лише одного правила.

3. Згенеруємо тестову вибірку зі 100 точок з використанням аналітичних залежностей (4)–(6); для задачі Auto MPG для тестування використаємо усі дані з датасету.

4. Побудуємо криві навчання у формі залежності $RMSE$ від кількості правил (N), використовуючи жадібний алгоритм відбору правил нечіткої бази знань. Експерименти проведемо для $N = \overline{1, N_{\max}}$, де N_{\max} – максимальна кількість несуперечливих правил.

Відбір правил здійснимо окремо за кожним списком за двома жадібними алгоритмами – адитивним та субтрактивним. Адитивний жадібний алгоритм стартує з порожньої бази знань і на кожній ітерації додає одне правило, яке найсильніше зменшує нев'язку $RMSE$. У поточній базі знань до кожного правила може бути додано лише одне суперечливе правило. Субтрактивний жадібний алгоритм розпочинає з повної бази знань, і на кожній ітерації вилучає те правило, без якого $RMSE$ зростає на мінімально можливий рівень. Результуючу криву навчання визначаємо за мінімальним значенням $RMSE$ адитивної та субтрактивної кривих навчання.

У випадку суперечливих правил-кандидатів застосовуємо таке обмеження: в нечіткій базі знань для кожного правила може бути лише один суперечливий аналог. У адитивному алгоритмі це обмеження враховується ітераційним вилученням зайвих суперечливих правил-кандидатів. У випадку застосування субтрактивного жадібного алгоритму до початку його роботи нечітку базу очищають від трійок суперечливих правил, залишаючи до кожного правила лише одне суперечливе. Очистка також здійснюється за жадібним підходом.

Списки узгоджених правил для аналізованих залежностей наведено в табл. 1–4. Для лінгвістичного опису вхідних змінних у залежності (4) застосуємо 4 терми, а для вихідної змінної – 5. Відповідно максимальна кількість узгоджених нечітких правил становить $N_{\max} = 4 \cdot 4 = 16$. Додаючи до них допустимі суперечливі правила, отримуємо, що кількість правил-кандидатів становить $C_{\max} = 43$. Для лінгвістичного опису змінних x_1 , x_2 та y в залежності (6) застосуємо 4, 3 та 5 термів відповідно. Для цієї залежності $N_{\max} = 4 \cdot 3 = 12$, а $C_{\max} = 29$. Для лінгвістичного опису змінних x_1 , x_2 та y в залежності (6) застосуємо 4, 5 та 4 терми відповідно. Для цієї залежності $N_{\max} = 4 \cdot 5 = 20$, а $C_{\max} = 58$. Для лінгвістичного опису змінних x_1 , x_2 та y в задачі Auto MPG застосуємо 4, 3 та 4 терми відповідно. Для цієї залежності $N_{\max} = 4 \cdot 3 = 12$, а $C_{\max} = 31$. Функції

належності нечітких термів наведено на рис. 4–7. В усіх базах знань використовуються гаусові функції належності.

Таблиця 1. Перелік узгоджених правил-кандидатів для нечіткого моделювання залежності (4)

№	Якщо		Тоді
	x_1	x_2	y
1	Низький	Низький	Низький
2	Низький	Середній	Низький
3	Низький	Високий	Низький
4	Низький	Дуже високий	Низький
5	Середній	Низький	Нижче середнього
6	Середній	Середній	Нижче середнього
7	Середній	Високий	Нижче середнього
8	Середній	Дуже високий	Нижче середнього
9	Високий	Низький	Нижче середнього
10	Високий	Середній	Середній
11	Високий	Високий	Середній
12	Високий	Дуже високий	Середній
13	Дуже високий	Низький	Середній
14	Дуже високий	Середній	Середній
15	Дуже високий	Високий	Вище середнього
16	Дуже високий	Дуже високий	Високий

Таблиця 2. Перелік узгоджених правил-кандидатів для нечіткого моделювання залежності (5)

№	Якщо		Тоді
	x_1	x_2	y
1	Низький	Низький	Високий
2	Низький	Середній	Вище середнього
3	Низький	Високий	Середній
4	Середній	Низький	Низький
5	Середній	Середній	Низький
6	Середній	Високий	Низький
7	Високий	Низький	Низький
8	Високий	Середній	Низький
9	Високий	Високий	Низький
10	Вище середнього	Низький	Нижче середнього
11	Вище середнього	Середній	Нижче середнього
12	Вище середнього	Високий	Нижче середнього

Таблиця 3. Перелік узгоджених правил-кандидатів для нечіткого моделювання залежності (б)

№	Якщо		Тоді
	x_1	x_2	y
1	Низький	Низький	Середній
2	Низький	Нижче середнього	Вище середнього
3	Низький	Середній	Вище середнього
4	Низький	Вище середнього	Вище середнього
5	Низький	Високий	Високий
6	Середній	Низький	Середній
7	Середній	Нижче середнього	Середній
8	Середній	Середній	Середній
9	Середній	Вище середнього	Середній
10	Середній	Високий	Середній
11	Високий	Низький	Середній
12	Високий	Нижче середнього	Середній
13	Високий	Середній	Середній
14	Високий	Вище середнього	Середній
15	Високий	Високий	Низький
16	Дуже високий	Низький	Вище середнього
17	Дуже високий	Нижче середнього	Вище середнього
18	Дуже високий	Середній	Середній
19	Дуже високий	Вище середнього	Середній
20	Дуже високий	Високий	Низький

Таблиця 4. Перелік узгоджених правил-кандидатів для нечіткого моделювання залежності Auto MPG

№	Якщо		Тоді
	x_1	x_2	y
1	Легкий	Швидкий	Середня
2	Легкий	Середній	Висока
3	Легкий	Повільний	Висока
4	Легше середнього	Швидкий	Нижче середньої
5	Легше середнього	Середній	Середня
6	Легше середнього	Повільний	Середня
7	Середній	Швидкий	Нижче середньої
8	Середній	Середній	Нижче середньої
9	Середній	Повільний	Середня
10	Важкий	Швидкий	Низька
11	Важкий	Середній	Низька
12	Важкий	Повільний	Низька

Експерименти з суперечливими правилами проведемо до повного наповнення бази знань. Повна база знань матиме N_{max} пар суперечливих правил.

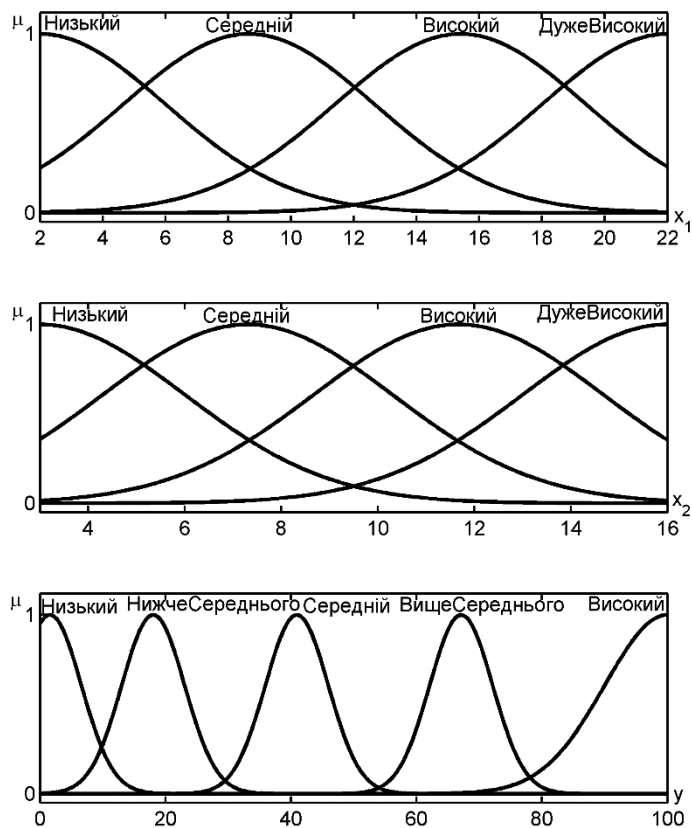


Рисунок 4. Функції належності залежності (4)

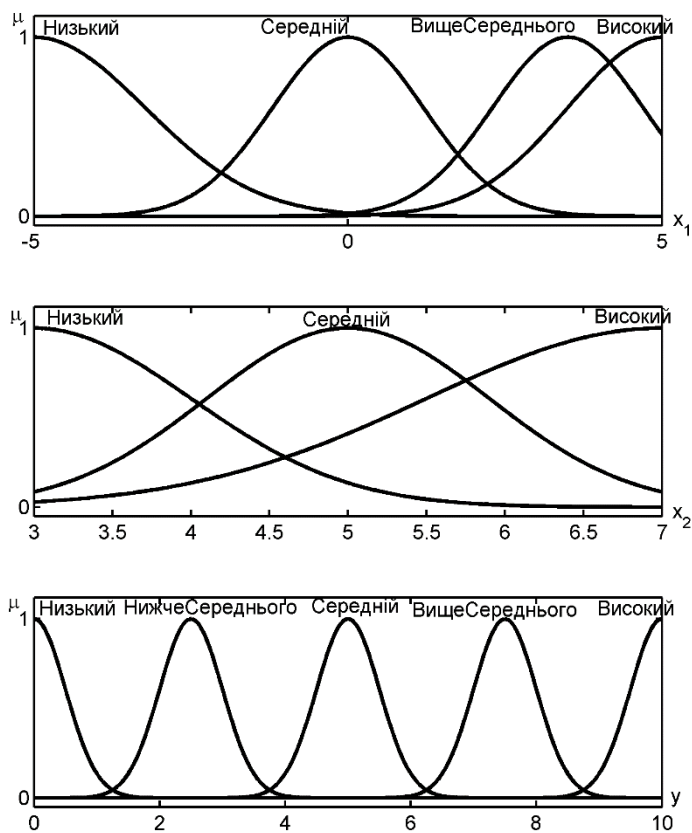


Рисунок 5. Функції належності залежності (5)

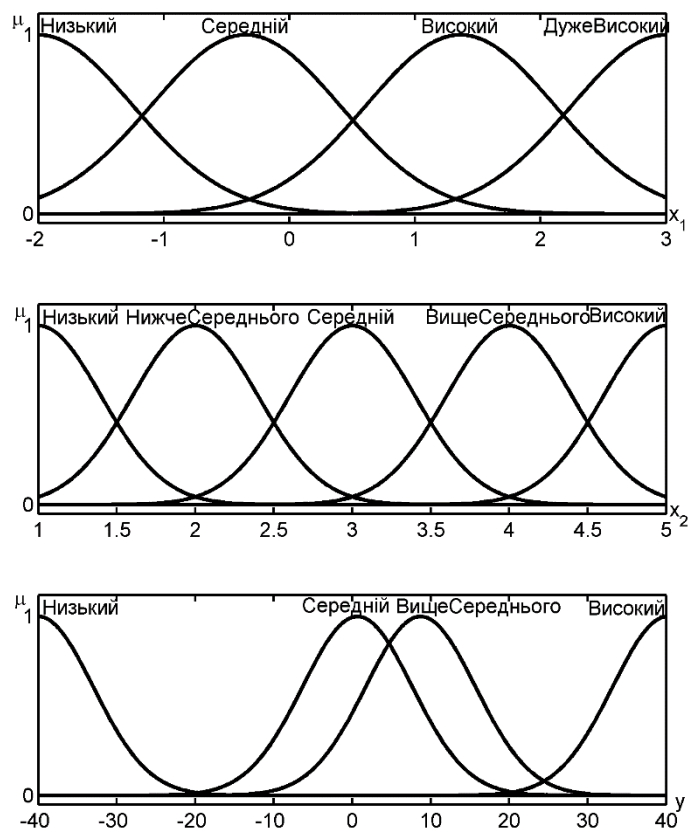


Рисунок 6. Функції належності залежності (6)

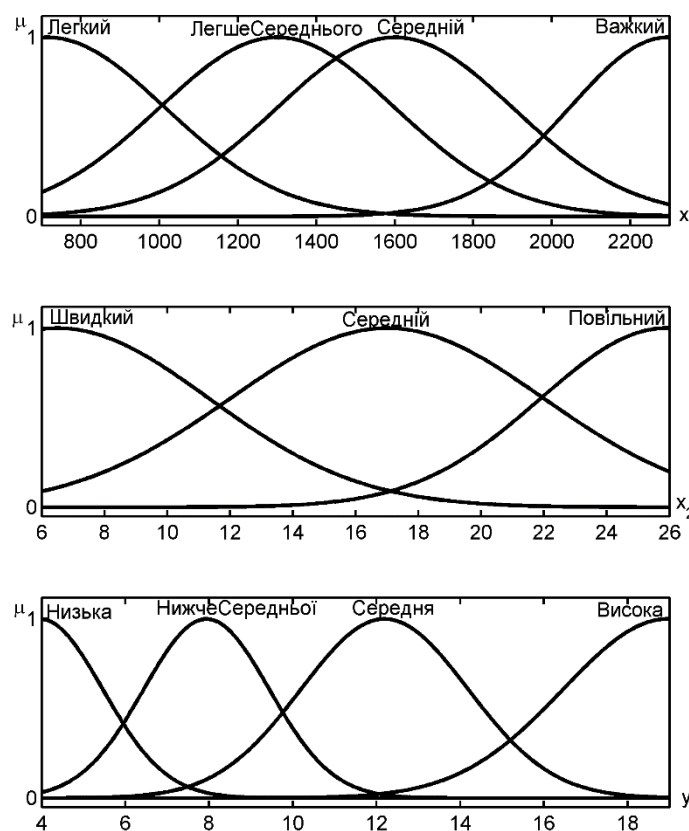


Рисунок 7. Функції належності залежності Auto MPG

Результати експериментів наведено в табл. 5. У ній використовуються такі нові позначення:

N_{DC} – кількість пар суперечливих правил у базі знань;

Typical best – найточніша база знань без суперечливих правил;

The same with DC – найточніша база знань із суперечливими правилами, з таким же обсягом, як і *Typical best*;

Short with DC – найточніша база знань із суперечливими правилами, обсяг якої не перевищує N_{max} ;

Best with DC – найточніша база знань із суперечливими правилами.

Таблиця 5. Результати експериментів

Залежність	Нечітка база знань	$RMSE$	N	N_{DC}	N_{max}	C_{max}
(4)	<i>Typical best</i>	4.3	8	0	16	43
	<i>The same with DC</i>	3.71	8	0		
	<i>Short with DC</i>	2.65	15	4		
	<i>Best with DC</i>	2.65	15	4		
(5)	<i>Typical</i>	1.06	3	0	12	29
	<i>The same with DC</i>	0.95	3	1		
	<i>Short with DC</i>	0.846	8	1		
	<i>Best with DC</i>	0.846	8	1		
(6)	<i>Typical</i>	3.29	11	0	20	58
	<i>The same with DC</i>	3.47	11	2		
	<i>Short with DC</i>	2.41	20	5		
	<i>Best with DC</i>	2.25	40	20		
Auto MPG	<i>Typical</i>	2.05	8	0	12	31
	<i>The same with DC</i>	1.83	8	3		
	<i>Short with DC</i>	1.83	11	5		
	<i>Best with DC</i>	1.83	11	5		

В усіх експериментах нечіткі бази знань із суперечливими правилами кращі за точністю, ніж звичайні нечіткі бази знань. Лише для залежності (6) обсяг найкращої бази знань з суперечливими правилами – *Best with DC* перевищує N_{max} . В інших випадках обсяг *Best with DC* не перевищує N_{max} – максимальну кількість несуперечливих прави. В усіх експериментах *Short with DC* – нечіткі бази знань обсягом меншим за N_{max} – виявилися кращими за аналогічні бази знань із суперечливими правилами. Для усіх експериментів покращення точності є суттєвим.

В експериментах з узгодженими бази знань виявилось, що кількість правил у найточніших із них становить від 25% до 67% від N_{max} . Суперечливі нечіткі бази знань (*Short with DC*) правил містять більше – від 75% до 100% від N_{max} . Якщо порівнювати найкращі нечіткі бази знань однакового обсягу – *Typical best* та *The same with DC*, – то виявляється, що лише для залежності (6) з суперечливими правилами вийшло гірше.

Криві навчання подано на рис. 8–11. За баз знань великого обсягу з кількістю правил, близькою до N_{max} , криві навчання суперечливих баз знань явно кращі. Для баз знань

середнього обсягу в 3 випадках із 4 перевага у суперечливих баз знань є відчутною. Для баз знань малого обсягу криві навчання приблизно однакові, що цілком очікувано.

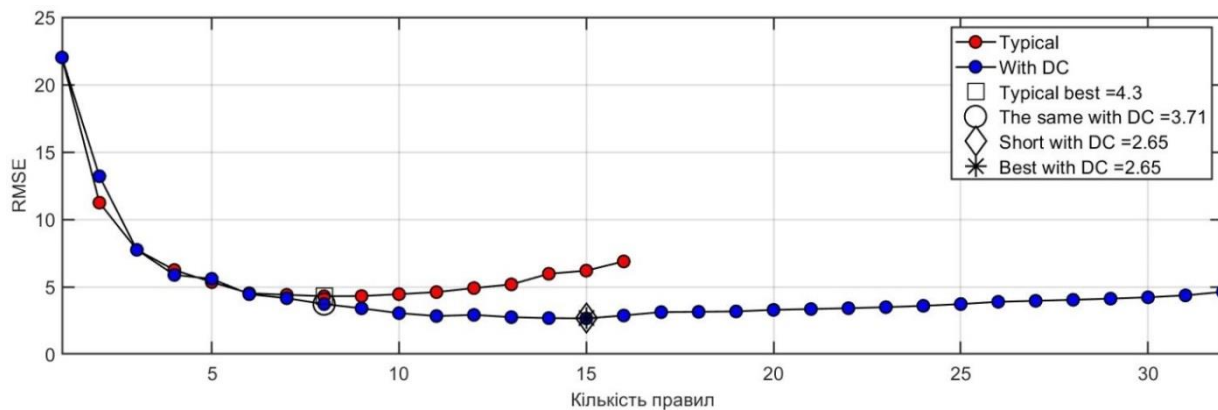


Рисунок 8. Криві навчання для залежності (4)

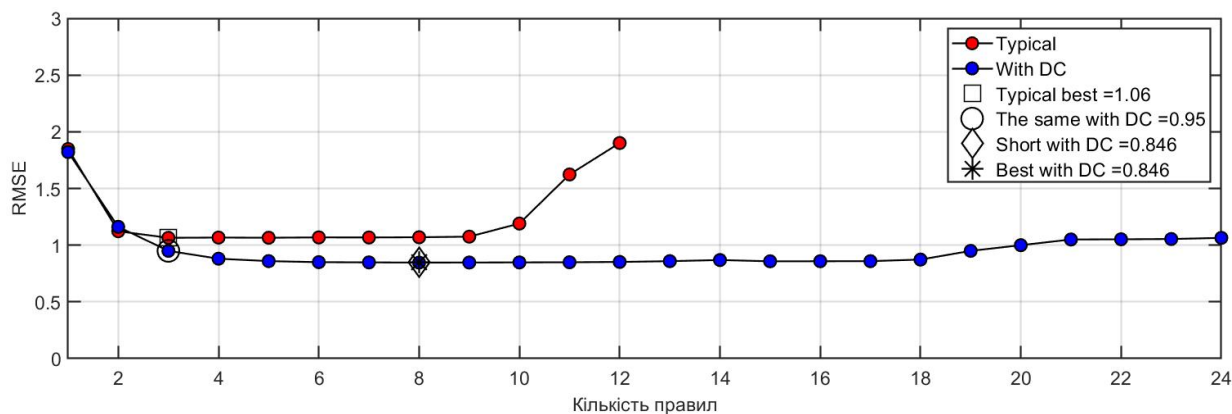


Рисунок 9. Криві навчання залежності (5)

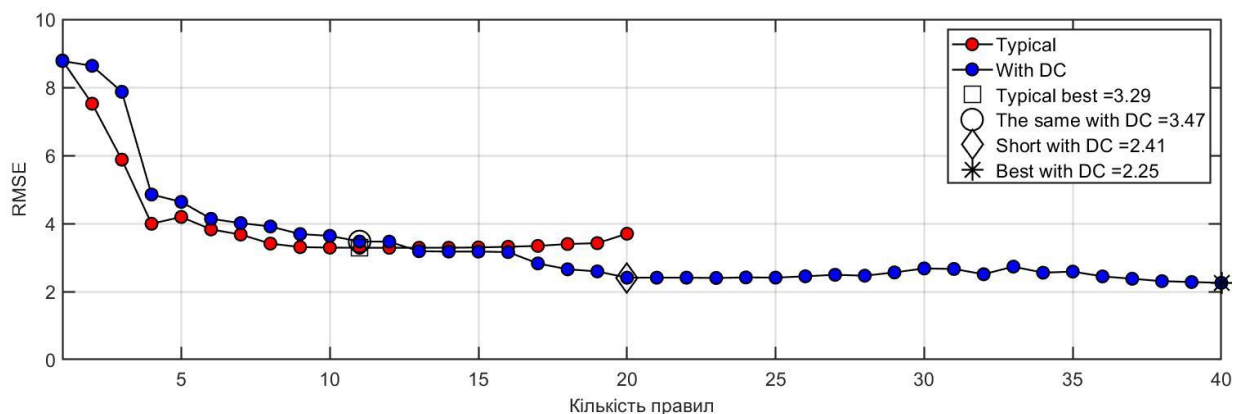


Рисунок 10. Криві навчання залежності (6)

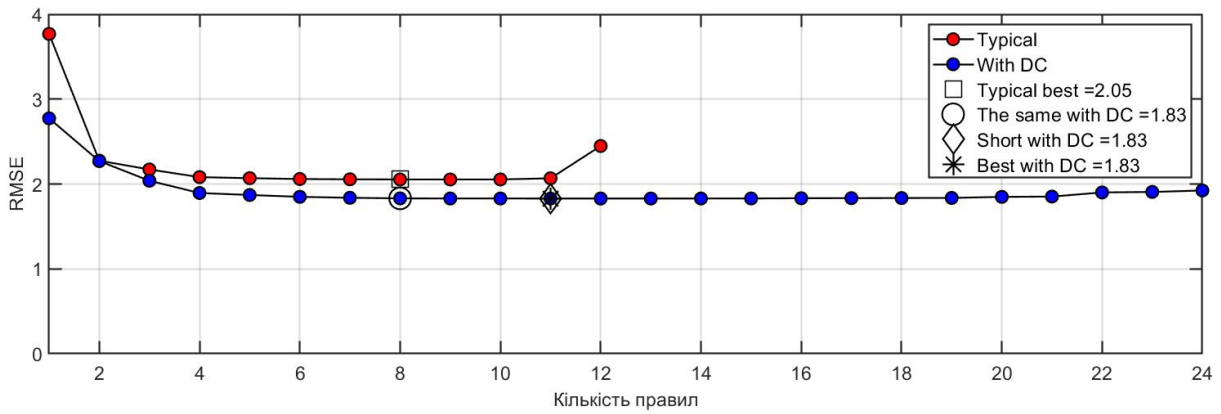


Рисунок 11. Криві навчання для задачі Auto MPG

Для порівняння, на рис. 12 виведено кілька поверхонь у випадку моделювання залежності (6) базами знань з табл. 5. Із цих рисунків видно, що нечіткі бази знань із суперечливими правилами не лише мають менше $RMSE$, але і візуально краще відновлюють залежність.

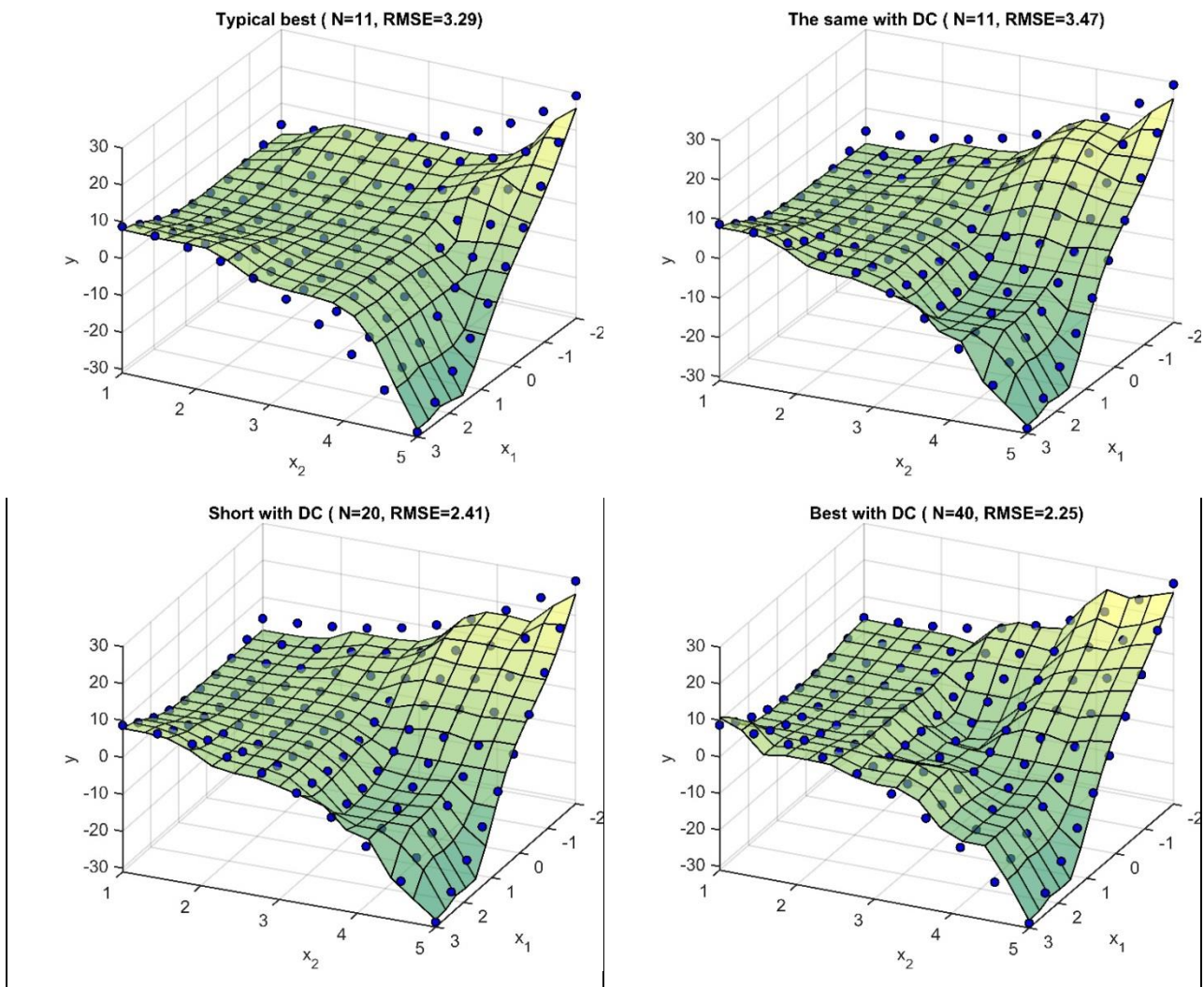


Рисунок 12. Поверхні «входи – вихід» баз знань, якими моделюється залежність (6)

Висновки

Експериментально встановлено, що застосування суперечливих правил Мамдані через підвищення роздільної здатності лінгвістичної опису залежностей забезпечує суттєву кращу точність. Це дає змогу на етапі структурної ідентифікації досягти кращої точності нечіткої бази знань за меншої кількості правил. Також встановлено, що за суперечливих правил логічне виведення можна коректно та результативно реалізувати за схемою А-FATI, тоді як у попередніх дослідженнях використовувалася спрощена схема В-FITA.

Подальші дослідження варто спрямувати на перевірку ефекту від використання суперечливих правил під час параметричної ідентифікації нелінійних залежностей за допомогою баз знань Мамдані.

Література

1. Varshney, A. K., & Torra, V. (2023). Literature review of the recent trends and applications in various fuzzy rule-based systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 25(6), 2163–2186. DOI: 10.1007/s40815-023-01534-w.
2. Tavana, M., & Hajipour, V. (2020). A practical review and taxonomy of fuzzy expert systems: methods and applications. *Benchmarking*. Emerald Group Holdings Ltd. DOI: 10.1108/BIJ-04-2019-0178.
3. Cordon, O. (2011). A historical review of evolutionary learning methods for Mamdani-type fuzzy rule-based systems: Designing interpretable genetic fuzzy systems. *International Journal of Approximate Reasoning*. DOI: 10.1016/j.ijar.2011.03.004.
4. Ishibuchi, H., Nakashima, T., Murata, T. (2001). Three-objective genetics-based machine learning for linguistic rule extraction. *Information Sciences*, 136(1–4), 109–133. DOI: 10.1016/S0020-0255(01)00144-X.
5. Guillaume, S., Charnomordic, B. (2010). Interpretable fuzzy inference systems for cooperation of expert knowledge and data in agricultural applications using FisPro. *2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence, WCCI 2010*. DOI: 10.1109/FUZZY.2010.5584673.
6. Ojha, V., Abraham, A., Snášel, V. (2019). Heuristic design of fuzzy inference systems: A review of three decades of research. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 85, 845–864. DOI: 10.1016/j.engappai.2019.08.010.
7. Shtovba, S., Shtovba, O., Pankevich, O. (2012). Accuracy and compactness criteria for evaluating the quality of fuzzy knowledge bases in identification problems. *Scientific Works of Vinnytsia National Technical University*, 4, URL: <https://works.vntu.edu.ua/index.php/works/article/view/356>
8. Shtovba, S., Mazurenko, V., Petrychko, M. (2020). Information technology for extracting the accurate, compact and interpretable Mamdani-type rule base. *CEUR Workshop Proceedings, 2711 “Proceeding of the XI Conference on Information Control Systems & Technologies”*, 386–400.

9. Gacto, M. J., Alcalá, R., & Herrera, F. (2011). Interpretability of linguistic fuzzy rule-based systems: An overview of interpretability measures. *Information Sciences*, 181(20), 4340–4360. DOI: 10.1016/j.ins.2011.02.021.
10. Shtovba, S. D. (2007). Ensuring accuracy and transparency of Mamdani fuzzy model in learning by experimental data. *Journal of Automation and Information Sciences*, 39(8), 39–52. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v39.i8.50.
11. Nozaki, K., Ishibuchi, H., & Tanaka, H. (1997). A simple but powerful heuristic method for generating fuzzy rules from numerical data. *Fuzzy Sets and Systems*, 86(3), 251–270. DOI: 10.1016/0165-0114(95)00413-0.
12. Cordon, O., & Herrera, F. (2000). A proposal for improving the accuracy of linguistic modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3), 335–344. DOI: 10.1109/91.855921.
13. Alcalá, R., Casillas, J., Cordon, O., & Herrera, F. (2003). Linguistic modeling with weighted double-consequent fuzzy rules based on cooperative coevolutionary learning. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4), 343–355. DOI: 10.3233/ica-2003-10405.
14. Dutu, L. C., Mauris, G., & Bolon, P. (2018). A fast and accurate rule-base generation method for Mamdani fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(2), 715–733. DOI: 10.1109/TFUZZ.2017.2688349.
15. Wang, L. X., & Mendel, J. M. (1992). Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 22(6), 1414–1427. DOI: 10.1109/21.199466.
16. Ruspini, E. H. (1969). A new approach to clustering. *Information and Control*, 15(1), 22–32. DOI: 10.1016/S0019-9958(69)90591-9.
17. Штовба, С. Д., Мазуренко, В. В. (2014). *Інтелектуальні технології ідентифікації залежностей. Лабораторний практикум: електронний навчальний посібник*. Вінниця, Вінницький національний технічний університет, 113 с.
18. Rotshtein, A., Rakytyanska, H. (2012). Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Vol. 275. Springer, Heidelberg, 313 p.

Рукопис отримано – 12/06/2023; прийнято до публікації – 26/06/2023.

© Донецький національний університет імені Василя Стуса, 2023

© Сергій Штовба, 2023

© Роман Резнік, 2023

Improving the accuracy of the Mamdani fuzzy rule base with double-consequent rules

Serhiy Shtovba, Roman Reznik

Abstract

The paper considers the problem of modeling the multi-factor dependencies with a continuous output using fuzzy rule bases. One of the main competitive advantages of fuzzy modelling is the interpretability of the fuzzy rule base – it is quite easy for a user who is far from mathematical methods to understand what makes up a particular conclusion. For fuzzy modelling of dependency with continuous output, both Mamdani and Sugeno rule bases are most commonly used. The Sugeno rule base is more accurate but has low interpretability. Mamdani rule bases have high interpretability but low accuracy. It is problematic to increase the interpretability of Sugeno rule bases because this property is due to the rule format. The task of improving the accuracy of the Mamdani rule base is quite easy to formalize, so we can try to solve it in some algorithmic way. The goal of this article is to improve the accuracy of the Mamdani rule base. The way to improve the accuracy of the Mamdani rule base is to use double-consequent rules. A double-consequent rule is equivalent to two ordinal rules with the same antecedents and different consequents. The computational experiments carried out have shown that the use of double consequent rules by increasing the resolution of the linguistic description of the dependency provides better accuracy. The experiments were performed on three synthetic datasets and one real Auto MPG dataset. The selection of rules is done by a greedy algorithm. The use of double-consequent rules allows for to achievement of better accuracy and compactness of the model during the structural stage of fuzzy identification. It was also found that fuzzy inference on double-consequent rules can be implemented correctly and efficiently using the A-FATI scheme, while in previous studies a simplified B-FITA scheme was used.

Keywords: fuzzy inference, Mamdani-type fuzzy rules, double-consequent rule, rule selection, greedy algorithm, accuracy.

References

1. Varshney, A. K., & Torra, V. (2023). Literature review of the recent trends and applications in various fuzzy rule-based systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 25(6), 2163–2186. DOI: 10.1007/s40815-023-01534-w.
2. Tavana, M., & Hajipour, V. (2020). A practical review and taxonomy of fuzzy expert systems: methods and applications. *Benchmarking*. Emerald Group Holdings Ltd. DOI: 10.1108/BIJ-04-2019-0178.
3. Cordón, O. (2011). A historical review of evolutionary learning methods for Mamdani-type fuzzy rule-based systems: Designing interpretable genetic fuzzy systems. *International Journal of Approximate Reasoning*. DOI: 10.1016/j.ijar.2011.03.004.
4. Ishibuchi, H., Nakashima, T., Murata, T. (2001). Three-objective genetics-based machine learning for linguistic rule extraction. *Information Sciences*, 136(1–4), 109–133. DOI: 10.1016/S0020-0255(01)00144-X.
5. Guillaume, S., Charnomordic, B. (2010). Interpretable fuzzy inference systems for cooperation of expert knowledge and data in agricultural applications using FisPro. *2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence, WCCI 2010*. DOI: 10.1109/FUZZY.2010.5584673.
6. Ojha, V., Abraham, A., Snášel, V. (2019). Heuristic design of fuzzy inference systems: A review of three decades of research. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 85, 845–864. DOI: 10.1016/j.engappai.2019.08.010.
7. Shtovba, S., Shtovba, O., Pankevich, O. (2012). Accuracy and compactness criteria for evaluating the quality of fuzzy knowledge bases in identification problems. *Scientific Works of Vinnytsia National Technical University*, 4, URL: <https://works.vntu.edu.ua/index.php/works/article/view/356>
8. Shtovba, S., Mazurenko, V., Petrychko, M. (2020). Information technology for extracting the accurate, compact and interpretable Mamdani-type rule base. *CEUR Workshop Proceedings*, 2711 “Proceeding of the XI Conference on Information Control Systems & Technologies”, 386–400.

9. Gacto, M. J., Alcalá, R., & Herrera, F. (2011). Interpretability of linguistic fuzzy rule-based systems: An overview of interpretability measures. *Information Sciences*, 181(20), 4340–4360. DOI: 10.1016/j.ins.2011.02.021.
10. Shtovba, S. D. (2007). Ensuring accuracy and transparency of Mamdani fuzzy model in learning by experimental data. *Journal of Automation and Information Sciences*, 39(8), 39–52. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v39.i8.50.
11. Nozaki, K., Ishibuchi, H., & Tanaka, H. (1997). A simple but powerful heuristic method for generating fuzzy rules from numerical data. *Fuzzy Sets and Systems*, 86(3), 251–270. DOI: 10.1016/0165-0114(95)00413-0.
12. Cordon, O., & Herrera, F. (2000). A proposal for improving the accuracy of linguistic modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3), 335–344. DOI: 10.1109/91.855921.
13. Alcalá, R., Casillas, J., Cordon, O., & Herrera, F. (2003). Linguistic modeling with weighted double-consequent fuzzy rules based on cooperative coevolutionary learning. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4), 343–355. DOI: 10.3233/ica-2003-10405.
14. Dutu, L. C., Mauris, G., & Bolon, P. (2018). A fast and accurate rule-base generation method for Mamdani fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(2), 715–733. DOI: 10.1109/TFUZZ.2017.2688349.
15. Wang, L. X., & Mendel, J. M. (1992). Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 22(6), 1414–1427. DOI: 10.1109/21.199466.
16. Ruspini, E. H. (1969). A new approach to clustering. *Information and Control*, 15(1), 22–32. DOI: 10.1016/S0019-9958(69)90591-9.
17. Shtovba, S. D., Mazurenko, V. V. (2014). *Intelektualni tekhnologii identyfikatsii zalezhnosti. Laboratornyi praktykum: elektronnyi navchalnyi posibnyk*. Vinnytsia, Vinnytsia National Technical University, 113 p. [In Ukrainian].
18. Rotshtein, A., Rakytyanska, H. (2012). Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Vol. 275. Springer, Heidelberg, 313 p.